-EXERCICE 14.3-

• ENONCE :

« Rebonds inélastiques d'une bille sur le sol »

• Une bille (B), assimilée à un point matériel de masse m, est lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur $h_0 = 4m$, au-dessus d'un sol horizontal.

• Elle rebondit verticalement jusqu'à une hauteur $h_1 = 1m$, puis retombe, rebondit etc..

• On note α le coefficient de restitution en vitesse du choc entre la bille et le sol, avec :

$$\alpha = \frac{|\text{ vitesse bille / sol APRES le choc }|}{|\text{ vitesse bille / sol AVANT le choc }|}$$

• On néglige la résistance de l'air, et le référentiel lié au sol est considéré comme galiléen.

1) Calculer α, ainsi que la hauteur h_n à laquelle rebondit la bille après le énième choc sur le sol.
2) En déduire l'énergie absorbée dans les chocs après le énième rebond.
3) Calculer le temps T au bout duquel la bille s'arrête.
4) Calculer la distance D parcourue par la bille avant de s'arrêter (on pourra prendre $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$).

• CORRIGE :

«Rebonds inélastiques d'une bille sur le sol »

1) En appliquant la conservation de l'énergie mécanique à la bille, entre l'instant initial et l'instant où elle arrive au contact avec le sol, juste avant le choc, on obtient (en notant v_0 le module de la vitesse juste avant le premier choc et en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du sol):

$$0+mgh_0=\frac{1}{2}mv_0^2+0 \quad \Rightarrow \quad v_0=\sqrt{2gh_0}$$

• La définition du coefficient de restitution en vitesse permet d'écrire (en notant v_1 le module de la vitesse juste après le premier choc) : $v_1=\alpha\times v_0$

• La conservation de l'énergie mécanique permet de prévoir que la bille va remonter à une hauteur h_1 telle que :

$$\frac{1}{2}mv_1^2+0=\frac{1}{2}m\alpha^2v_0^2=\frac{1}{2}m\alpha^2\times 2gh_0=0+mgh_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha=\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}} \qquad \underline{\text{A.N}} : \boxed{\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}}=0,5}$$

• De la même manière que précédemment, on peut établir que :

$$v_{n-1}=\sqrt{2gh_{n-1}} \;,\; v_n=\alpha\times v_{n-1} \;,\; h_n=\frac{v_n^2}{2g} \Rightarrow h_n=\alpha^2\times h_{n-1}=\alpha^4\times h_{n-2}=... \Rightarrow \boxed{h_n=h_0\times\alpha^{2n}}$$

2) Un bilan énergétique montre que l'énergie absorbée au cours des n chocs est égale à la différence d'énergie potentielle entre l'instant initial et l'instant où la bille est remontée à la hauteur h_n (à ces 2 instants, l'énergie cinétique de la bille est nulle) ; on a donc :

$$\boxed{E_{absorbée}=mgh_0-mgh_n=mgh_0(1-\alpha^{2n})}$$

3) Le PFD appliqué à la bille et projeté sur un axe Oz orienté vers le haut, fournit :

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt}=-gt+cste=-gt \;\; (\text{car } v(0)=0) \;\Rightarrow\; \boxed{z(t)=-\frac{g}{2}\times t^2+h_0}$$

$\Rightarrow$ la bille touche le sol à l'instant t_0 tel que : $0=-\frac{g}{2}\times t_0^2+h_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$

• De façon identique, on peut calculer le temps $t_1^{'}$ que mettra la bille pour remonter du sol jusqu'à la hauteur h_1, soit :

$t_1^{'}=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ $\Rightarrow$ par symétrie, la durée qui sépare le 1^er rebond du 2^ème vaut :

$$t_1=2t_1^{'}=2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}=2\sqrt{\frac{2h_0\alpha^2}{g}}=2\alpha t_0 \;;\; \text{de même, on a : } t_2=2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}=2\sqrt{\frac{2h_1\alpha^2}{g}}=2\sqrt{\frac{2h_0\alpha^4}{g}}=2\alpha^2t_0 \Rightarrow$$

$$T=t_0+t_1+t_2+...=t_0+2\alpha t_0\times\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i \Rightarrow T=t_0+2\alpha t_0\times\frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \boxed{T=t_0\times\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \qquad \underline{\text{A.N}} : \boxed{T=2,71s}$$

4) Pour calculer la distance parcourue, il suffit de reprendre les résultats de la 1ère question, soit :

$$D = h_0 + h_1 + h_2 + ... = h_0 + 2h_0\alpha^2 + 2h_0\alpha^4 + ... = h_0 + 2h_0\alpha^2 \times \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{D = h_0 + 2h_0\alpha^2 \times \frac{1}{1-\alpha^2} = h_0 \times \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}}$$

A.N : $\boxed{D = 6,67m}$

Rq : dans cet exercice (comme chaque fois qu'il y a choc entre une particule et un obstacle « fixe »), il ne faut pas chercher à appliquer la conservation de la quantité de mouvement du système, car la masse de l'obstacle est très grande et son « recul » très faible ⇒ la quantité de mouvement de l'obstacle n'est pas connue.